X-ENS

Planche 1 PLCR
Soit E un ensemble. Soit $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ croissante pour l'inclusion.

1. Montrer que φ possède un point fixe.

2. Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ injective et soit $g : F \to E$ injective.
   En considérant $\psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $A \mapsto E \setminus g(F \setminus f(A)))$ montrer qu'il existe une bijection de E sur F. (Théorème de Cantor Bernstein)

Indication 1 On pourra s'intéresser à $\mathcal{A} = \{A \subset E \mid \varphi(A) \subset A\}$.

Solution 1

1. On s'intéresse à $\mathcal{A} = \{A \subset E \mid \varphi(A) \subset A\}$. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ car $E \in \mathcal{A}$. On pose $F = \bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} A$.
   Soit $A \in \mathcal{A}$. $F \subset A$ et donc $\varphi(F) \subset \varphi(A)$ par croissante de φ. Mais on a aussi $\varphi(A) \subset A$ puisque $A \in \mathcal{A}$, par transitivité de $\subset$, $\varphi(F) \subset A$. Comme ceci est vrai pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\varphi(F) \subset F$. On en déduit que $F \in \mathcal{A}$ et donc, toujours par croissance de l'inclusion, $\varphi(F) \in \mathcal{A}$ et donc, par définition de F, $F \subset \varphi(F)$. Finalement, $F = \varphi(F)$.

2. On vérifie que ψ est croissante pour l'inclusion. La première question donne l'existence d'un point fixe pour ψ. Notons le A. On définit alors

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f} & : & E & \to & F \\ & & x & \mapsto & \left| \begin{array}{lll} f(x) & & \text{si} \quad x \in A \\ \;y & \text{avec } g(y) = x & \text{si} \quad x \in E \setminus A. \end{array} \right. \end{array}$$

   On vérifie que $\tilde{f}$ est bien définie ($g(F \setminus f(A)) = E \setminus A$) et que $\tilde{f}$ est une bijection de E sur F.

Planche 2 L
On munit $E = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ de sa structure de groupe additif : $a + b = (a_n + b_n)$ si $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$. On note E^* l'ensemble des morphismes de groupes de E dans $\mathbb{Z}$. On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $e_k = (\delta_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$.
Montrer que si un élément f de E^* est nul en chaque e_k, alors f est nulle.

Indication 2 On pourra considérer des suites du type $(p^n a_n)$.

Solution 2
Soit f dans E^* tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(e_k) = 0$.
Soit $a = (a_n) \in E$. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. On définit $b = (p^n a_n)$.
Soit $N \in \mathbb{N}$. On peut écrire

$$a = \sum_{k=0}^{N} a_k e_k + R_N \quad \text{et} \quad b = \sum_{k=0}^{N} p^k a_k e_k + \tilde{R}_N$$

où $R_N = (r_n)$ avec $r_n = 0$ pour $n \in [\![0, N]\!]$ et $r_n = a_n$ pour $n \geq N+1$ et $\tilde{R}_N = (\tilde{r}_n)$ avec $\tilde{r}_n = 0$ pour $n \in [\![0, N]\!]$ et $\tilde{r}_n = p^n a_n$ pour $n \geq N+1$. On a alors, puisque f est un morphisme de groupes

$$f(a) = \sum_{k=0}^{N} a_k f(e_k) + f(R_N) \quad \text{et} \quad f(b) = \sum_{k=0}^{N} p^k a_k f(e_k) + f(\tilde{R}_N)$$

ou encore

$$f(a) = f(R_N) \quad \text{et} \quad f(b) = f(\tilde{R}_N).$$

Or, on peut écrire $\tilde{R}_N = p^{N+1}\hat{R}_N$, avec $\hat{R}_N = (\hat{r}_n)$ où $\hat{r}_n = 0$ pour $n \in [\![0, N]\!]$ et $\hat{r}_n = p^{n-N-1}a_n$ pour $n \geq N+1$. Mais alors, f étant un morphisme de groupes, $f(b) = p^{N+1}f(\hat{R}_N)$. f étant à valeurs entières, p^{N+1} divise $f(b)$ et ce, pour tout $N \in \mathbb{N}$: $f(b) = 0 = f(\hat{R}_N)$.
Or, $\hat{R}_N = R_N + (p-1)\overline{R}_N$, avec $\overline{R}_N = (\overline{r}_n)$ où $\overline{r}_n = 0$ pour $n \in [\![0, N+1]\!]$ et $\overline{r}_n = \frac{p^{n-N-1}-1}{p-1}a_n$ pour $n \geq N+2$. On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N+2$, $\frac{p^{n-N-1}-1}{p-1} \in \mathbb{N}$, car $\frac{p^{n-N-1}-1}{p-1} = \sum_{l=0}^{n-N-2} p^k$.

Par propriété d'un morphisme de groupes, $f(\hat{R}_N) = 0 = f(R_N) + (p-1)f(\overline{R}_N)$ et donc $p-1$ divise $f(R_N) = f(a)$. Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $f(a) = 0$.

Planche 3 CR
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décrire les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Indication 3 Les transpositions engendrent l'ensemble des permutations.

Solution 3
Notons $A = (a_{i,j})$. Pour tout $\sigma \in S_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})$.
Soit $(k,l) \in [\![1, n]\!]^2$, avec $k \neq l$. On prend pour σ la transposition $\tau_{k,l}$. $P_\sigma A = AP_\sigma$ donne alors pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $p \neq k$ et $p \neq l$, $a_{l,p} = a_{k,p}$, $a_{p,k} = a_{p,l}$ et $a_{l,l} = a_{k,k}$.
En faisant varier k et l, on obtient que tous les les éléments de la diagonale sont égaux et tous ceux en dehors de la diagonale le sont aussi : il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $A = aI_n + b(J - I_n)$ avec J la matrice ne comportant que des 1.

Planche 4 CR
Soit K un corps.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
   (i) K est algébriquement clos
   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in \mathcal{L}(K^n)$, u admet un vecteur propre.

2. Montrer que deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ qui commutent ont un vecteur propre en commun.

Indication 4 Penser aux matrices compagnons.

Solution 4

1. (i) $\Longrightarrow$ (ii) On suppose donc K algébriquement clos. Le polynôme caractéristique de u a donc une racine, i.e. u possède au moins une valeur propre et donc un vecteur propre.
   (ii) $\Longrightarrow$ (i) Soit P un polynôme de degré au moins 1. On le note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$. P a les mêmes racines que $Q = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k$ avec $b_d = 1$ et pour $k = 0 \cdots d-1$, $b_k = \frac{a_k}{a_d}$.
   On construit alors la matrice
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & & & -b_0 \\ 1 & \ddots & & -b_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix}.$$

On vérifie que le polynôme caractéristique de M est Q. On note alors u l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M. Son polynôme caractéristique est Q. Comme u possède un vecteur propre, il possède une valeur propre et donc son polynôme caractéristique une racine : P possède une racine.

2. Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. $\mathbb{C}$ est algébriquement clos : par ce qui précède, u possède un vecteur propre. Notons λ la valeur propre associée. Le sous-espace propre de u associé à λ est stable par v. On note $\tilde{v}$ l'endomorphisme induit. Toujours par la question précédente, $\tilde{v}$ possède un vecteur propre. Notons le e. D'une part, e est un vecteur propre de v et d'autre part il se trouve dans $E_\lambda(u)$, donc c'est aussi un vecteur propre de u. On a bien trouvé un vecteur propre commun à u et v.

Planche 5 P
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient u et v deux endomorphismes de E qui ont les mêmes sous-espaces stables.

1. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.
2. Commutent-ils ?

Indication 5 Pour la deuxième question : distinguer $n = 2$ et $n \geq 3$.

Solution 5

1. Le corps de base étant $\mathbb{C}$, u est trigonalisable. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice représentative de u est triangulaire supérieure. Pour $i = 1 \cdots n$, on note $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$. Chaque F_i est stable par u et donc stable par v. On en déduit que la matrice représentative de v dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure et donc que u et v sont cotrigonalisables.

2. On remarque tout d'abord que si u est diagonalisable, chaque sous-espace propre étant stable par v, les endomorphismes induits sur chaque sous-espace propre commutent (celui de u est une homothétie) et donc u et v commutent. De même si v est diagonalisable.
On suppose donc dorénavant que ni u, ni v ne sont diagonalisables.
<u>Etudions le cas $n = 2$.</u> On choisit une base de cotrigonalisation. On peut donc représenter u par $A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et v par $B = \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. On calcule alors AB et BA et on remarque qu'elles sont égales.
Pour $n = 2$, on peut donc dire que u et v commutent toujours dès qu'ils ont les mêmes sous-espaces stables.
<u>Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.</u> On pose
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & n-1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$
On note u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement.
Montrons que u et v ont les mêmes sous-espaces stables et que pourtant ils ne commutent pas.
C'est facile de voir qu'ils ne commutent pas. Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$,

alors $(u \circ v)(e_n) = (n-1)e_{n-2}$ tandis que $(v \circ u)(e_n) = (n-2)e_{n-2}$.
Soit F un sous-espace stable par u. On note d sa dimension. On suppose que $d \geq 2$, sinon, il est clairement stable par v. L'endomorphisme induit $\tilde{u}$ est nilpotent de rang $d-1$ (car u est nilpotent de rang $n-1$). Soit $\widetilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e_1}, \dots, \tilde{e_d})$ une base de F qui trigonalise $\tilde{u}$. La matrice représentative de $\tilde{u}$ dans cette base est triangulaire stricte.
On vérifie alors par récurrence sur $i \in [\![1, d]\!]$ que $\mathrm{Vect}(\tilde{e_1}, \dots, \tilde{e_i}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.
Comme $u(\tilde{e_1}) = 0$ et comme le noyau de u est la droite vectorielle engendrée par e_1, on a bien $\mathrm{Vect}(\tilde{e_1}) = \mathrm{Vect}(e_1)$. Supposons vraie l'hypothèse au rang i et montrons là au rang $i+1$. Il suffit de vérifier que $\widetilde{e_{i+1}} \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i+1})$. Par l'absurde, en décomposant $\widetilde{e_{i+1}}$ dans la base canonique et en notant k le plus grand indice pour lequel la coordonnée est non nulle. On a donc $k > i+1$. Alors $u(\widetilde{e_{i+1}})$ aura une composante non nulle sur e_{k-1}, mais ce n'est pas possible car $u(\widetilde{e_{i+1}}) \in \mathrm{Vect}(\tilde{e_1}, \dots, \tilde{e_i}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ et $k-1 > i$.
On en déduit que $\mathrm{Vect}(\tilde{e_1}, \dots, \tilde{e_d}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_d)$ et donc que $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_d)$. Ainsi F est bien stable par v.
Par symétrie, les sous-espaces stables par v sont stables par u. On a bien montré que u et v ont les mêmes sous-espaces stables alors qu'ils ne commutent pas.

Planche 6 P
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, u un endomorphisme de E et $x_1, \dots, x_{n+1}$ des vecteurs propres de u tels que, pour toute partie I de cardinal n de $[\![1, n+1]\!]$, $(x_i)_{i \in I}$ soit libre. Que dire de u ?

Indication 6

Solution 6
Tout d'abord, on remarque que u est diagonalisable.
En effet, $\mathcal{B} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de E qui comporte n vecteurs et E est de dimension finie n, donc $\mathcal{B}$ est une base de E et elle est constituée de vecteurs propres de E.
Pour $i = 1 \cdots n$, on note $u(x_i) = \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$.
x_{n+1} se décompose dans $\mathcal{B}$: $x_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{n+1,k} x_k$. On a alors $u(x_{n+1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{n+1,k} u(x_k)$ et donc

$$\lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} x_{n+1,k} \lambda_k x_k.$$

Comme $\lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{n+1,k} \lambda_{n+1} x_k$, par unicité de l'écriture dans une base, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_{n+1,k} \lambda_k = x_{n+1,k} \lambda_{n+1}$. Mais aucun des $x_{n+1,k}$ ne peut être nul, sinon, on aurait une sous-famille de (x_i) de cardinal au plus n liée. On a donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k = \lambda_{n+1}$. Finalement, $u = \lambda_{n+1} Id_E$, u est une homothétie.

Planche 7 L
Dans un espace euclidien E, on considère une famille génératrice $(x_1, \dots, x_n)$. On note C l'enveloppe convexe des x_i.

1. Montrer l'existence d'un point de C qui minimise $\| \ \|$ sur C.

On suppose, pour tout y de E : $(\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle y, x_i \rangle \geq 0) \implies (\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle y, x_i \rangle = 0)$.

2. Montrer que 0 est dans C.

3. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est liée par des coefficients positifs.

4. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est liée par des coefficients strictement positifs.

Indication 7 Projection sur un convexe fermé : faire un dessin.

Solution 7

1. C est un convexe compact, en effet, si $\varphi : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, φ est continue et $C = \varphi(D)$ avec $D = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n | \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\}$, D étant bien compact.
La fonction norme est alors continue sur C compact, donc elle y possède un minimum.

2. On note c un point qui minimise $\| \ \|$ sur C : $c \in C$. Un tel c existe par la question précédente. Montrons que $c = 0$, on aura alors prouvé que $0 \in C$.
Soit $y \in C$. Soit $\lambda \in]0, 1[$: $\lambda y + (1-\lambda)c \in C$ puisque C est convexe. On a donc $\|\lambda y + (1-\lambda)c\| \geq \|c\|$, ou encore $\|c + \lambda(y-c)\|^2 \geq \|c\|^2$. On développe et simplifie, il vient
$$2\langle c, y-c\rangle + \lambda\|y-c\|^2 \geq 0$$
et donc
$$2\langle c, y-c\rangle \geq -\lambda\|y-c\|^2.$$
On peut alors faire tendre λ vers 0 et on obtient
$$\langle c, y-c\rangle \geq 0.$$
Finalement, pour tout $y \in C$, $\langle y, c\rangle \geq \|c^2\| \geq 0$, c'est en particulier vrai pour tous les x_i et donc, avec l'hypothèse donnée, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\langle x_i, c\rangle = 0$. Mais la famille x_i étant génératrice, on a alors $\langle c, c\rangle = 0$, i.e. $c = 0$.

3. Découle immédiatement de ce qui précède puisque tout élément de C s'écrit comme une combinaison linéaire des x_i avec des coefficients positifs de somme 1, c'est donc en particulier vrai pour 0.

4. Supposons, qu'un des coefficients de la décomposition de la question précédente soit nul. Prenons, par exemple, celui d'indice n. On écrit donc $0 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$, avec les λ_i strictement positifs (sinon, on ne garde que la sous-famille pour lesquels les coefficients sont strictement positifs). On note F le sous espace vectoriel engendré par $(x_i)_{1\leq i \leq n-1}$. Montrons que $x_n \in F$. En effet, $x_n = y_n + z_n$, avec $y_n \in F$ et $z_n \in F^\perp$. Pour $i = 1 \cdots n-1$, $\langle z_n, x_i\rangle = 0 \geq 0$ et $\langle z_n, x_n\rangle = \langle z_n, z_n\rangle \geq 0$. On a donc $\langle z_n, x_n\rangle = \langle z_n, z_n\rangle = 0$, i.e. $z_n = 0$: $x_n = y_n \in F$.
On décompose alors $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$ et donc $x_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-\alpha_i) x_i = 0$. On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$x_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-\alpha_i + t\lambda_i) x_i = 0.$$
Tous les λ_i étant strictement positifs, on peut choisir t suffisamment grand pour que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $-\alpha_i + t\lambda_i > 0$. On a alors atteint notre objectif.

Planche 8 P
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) il existe une norme N pour laquelle A est une isométrie,
(ii) pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\{A^k X,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est borné,
(iii) A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec des valeurs propres de module 1.

Indication 8 Traduire A non diagonalisable avec son polynôme minimal.

Solution 8
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N(A^k X) = N(X)$.
Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Alors $N(AX) = 0$ et donc $N(X) = 0$: $X = 0$. Finalement, on a montré que A est injective. Elle est donc inversible.
Alors $N(A^{-1}X) = N(AA^{-1}X) = N(X)$ et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $N(A^k X) = N(X)$.
Finalement, $\{N(A^k X),\ k \in \mathbb{Z}\} = \{N(X)\}$ et $\{A^k X,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est bien borné.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Remarquons tout d'abord, que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, $\{A^k X,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est borné aussi (l'ensemble des parties réelles et imaginaires est borné).
Soit λ une valeur propre complexe de A. Comme A est inversible, $\lambda \neq 0$.
Soit $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé ($X \neq 0$). Alors $AX = \lambda X$ et $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$ et $A^{-k}X = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k X$. Supposons que λ ne soit pas de module 1, par exemple, $|\lambda| > 1$, alors $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite non bornée et donc $(A^k X)_{k\in\mathbb{N}}$ non plus, ce qui contredit la remarque faite au début. On procède de même si $|\lambda| < 1$ en utilisant $(A^{-k}X)_{k\in\mathbb{N}}$.
Donc toutes les valeurs propres complexes de A sont de module 1.
Supposons que A ne soit pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$: son polynôme minimal (dans $\mathbb{C}[X]$) n'est pas à racines simples (il est bien scindé...). Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $d \in \mathbb{N}^*$, $d \geq 2$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\pi_A = (X - \lambda)^d Q$, avec $Q(\lambda) \neq 0$.
Posons $N = A - \lambda I_n$. $A = \lambda I_n + N$. On choisit $X_0 \in \mathrm{Ker}(N^d)$, $N^{d-1}X_0 \neq 0$. Un tel X_0 existe, sinon, N ne serait pas nilpotente d'indice d et le polynôme minimal de A diviserait $(X - \lambda)^{d-1}Q$.
$I = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(N)(X_0) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$, non réduit à $\{0\}$. Il possède donc un générateur. On le note π_0. Comme $X^d \in I$, π_{X_0} divise X^d et $\pi_{X_0} = X^p$, avec $p \in [\![1, d]\!]$. Si $p < d$, on aurait $N^{d-1}X_0 = 0$, ce qui n'est pas. Donc $p = d$. $(X_0, NX_0, \ldots, N^{d-1}X_0)$ est une famille libre (sinon, il y aurait dans I un polynôme non nul de degré plus petit que le polynôme minimal). Or, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq d$,

$$A^k X_0 = \sum_{l=0}^{d-1} \binom{k}{l} \lambda^{k-l} N^l X_0$$

et comme $(A^k X_0)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, chaque suite des composantes dans $(X_0, NX_0, \ldots, N^{d-1}X_0)$ est bornée. En particulier ($l = 1$, possible, car $d - 1 \geq 1$, puisque $d \geq 2$) $(k\lambda^{k-1}NX_0)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Ce qui est clairement faux. Donc A est diagonalisable.
(iii) $\Longrightarrow$ (i) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On définit sur $\mathbb{C}^n$, N' par : pour tout $Y \in \mathbb{C}^n$, $N'(Y) = \|P^{-1}Y\|_\infty$. C'est bien une norme. On note N la restriction de cette norme à $\mathbb{R}^n$. C'est toujours une norme. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, $N(AX) = N'(AX) = \|P^{-1}PDP^{-1}X\|_\infty = \|DP^{-1}X\|_\infty$.
Notons, $Y = P^{-1}X = (y_1, \ldots, y_n)$. On a alors $N(AX) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda_i y_i|$. Comme toutes les valeurs propres de A sont de module 1, $N(AX) = \|Y\|_\infty = N(X)$. A est bien une isométrie pour cette norme N.

Planche 9 CR
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose f surjective. Montrer que l'ensemble des zéros de f n'est pas un compact.

2. On suppose que f est convexe et que l'ensemble des zéros de f est un compact non vide. Montrer que $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\to} +\infty$.

Indication 9 Pour la deuxième question, f peut-elle ne prendre que des valeurs strictement négatives autour d'un de ses zéros ?

Solution 9

1. Notons $\mathcal{Z}_f$ l'ensemble des zéros de f. $\mathcal{Z}_f$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, $\mathcal{Z}_f$ est compact si et seulement si $\mathcal{Z}_f$ est borné. Par l'absurde, supposons $\mathcal{Z}_f$ borné. Il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq R \Longrightarrow f(x) \neq 0$. Or $\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$ est connexe par arcs ($n \geq 2$) et $f(\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)) \subset \mathbb{R}^*$. f étant continue, $f(\mathbb{R}^n \setminus B(0,R) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $f(\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)) \subset \mathbb{R}_-^*$. Supposons par exemple que $f(\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)) \subset \mathbb{R}_+^*$. f étant continue elle est bornée sur $B'(0,R)$. Il existe donc un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ tel que $f(B'(0,R)) \subset [a,b]$ et en notant $\alpha = \min(a,0)$, on a $f(\mathbb{R}^n) \subset [\alpha,+\infty[$, ce qui contredit la surjectivité de f.

2. Soit $x_0 \in \mathcal{Z}_f$. $\mathcal{Z}_f$ est compact donc borné. Ainsi, il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{Z}_f \subset B(x_0,R)$.
f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,R)$ connexe par arcs donc $f(\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou
$f(\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)) \subset \mathbb{R}_-^*$. Supposons que $f(\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)) \subset \mathbb{R}_-^*$. On choisit $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = R$. Alors $x_0 + v$ et $x_0 - v$ sont dans $\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,R)$ et donc $f(x_0+v) < 0$ et $f(x_0-v) < 0$. Mais par convexité de f, puisque $x_0 = \frac{1}{2}(x_0+v+x_0-v)$, $f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x_0+v) + \frac{1}{2}f(x_0-v) < 0$: contradiction. On en déduit que $f(\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)) \subset \mathbb{R}_+^*$.
$S(x_0,R)$ est compact et f y prend des valeurs strictement positives. f étant continue, elle y possède un minimum $m > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| \geq \|x_0\| + R$. Alors, $\|x - x_0\| \geq R$. On peut écrire, $x = x_0 + tu$, avec $t = \frac{\|x-x_0\|}{R}$ et $u = \frac{R}{\|x-x_0\|}(x-x_0)$. On a ainsi, $u = \frac{1}{t}x + \left(1-\frac{1}{t}\right)x_0 - x_0$. On note $v = \frac{1}{t}x + \left(1-\frac{1}{t}\right)x_0$. $\|v - x_0\| = \|u\| = R$, ainsi $v \in S(x_0,R)$, donc $f(v) \geq m$. Mais par convexité de f, puisque $\frac{1}{t} \in [0,1]$,
$$f(v) \leq \frac{1}{t}f(x) + \left(1-\frac{1}{t}\right)f(x_0)$$
ce qui se réécrit
$$f(x) \geq tm \quad \text{ou} \quad f(x) \geq \frac{m}{R}\|x-x_0\| \geq \frac{m}{R}\left(\|x\| - \|x_0\|\right).$$
On en déduit que $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Planche 10 PLCR
Si E est un espace vectoriel réel, C une partie convexe de E et x un point de C, on dit que x est un point extrémal de C lorsque $C \setminus \{x\}$ est convexe.
On considère ici l'espace E des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Déterminer les points extrémaux de la boule unité fermée de E pour la norme de la convergence en moyenne quadratique et pour la norme de la convergence uniforme.

Indication 10 On pourra faire un dessin dans $E = \mathbb{R}^2$ des boules unités fermées pour $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$, trouver le résultat dans ces cas là puis s'en inspirer.

Solution 10
Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, pour $\|.\|_2$, les points extrémaux sont la sphère unité et pour $\|.\|_\infty$ les points extrémaux sont les quatre "coins" de la sphère, ceux pour lesquels les deux coordonnées valent 1 en valeur absolue.
On va montrer, dans le cas demandé, que d'une part, pour la norme de la convergence quadratique, les points extrémaux sont les points de la sphère et que, d'autre part, dans le cas de la norme de la convergence uniforme, les points extrémaux sont les fonctions constantes en 1 ou en -1.
Dans un premier temps, on remarque que les points extrémaux ne peuvent se trouver que sur la

sphère. En effet, si x est dans la boule unité ouverte, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset B(0,1)$. Pour v un vecteur unitaire, $x + \frac{r}{2}v$ et $x - \frac{r}{2}v$ sont dans la boule unité (ouverte, donc fermée) et $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{r}{2}v\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{r}{2}v\right)$. La boule unité fermé privée de x n'est alors pas convexe.

Pour la norme de la convergence en moyenne quadratique.

Soit f telle que $\displaystyle\int_0^1 f^2 = 1$. Montrons que $B'(0,1) \setminus \{f\}$ est convexe.

Soient g et h dans $B'(0,1) \setminus \{f\}$, $g \neq h$. Soit $\lambda \in]0,1[$. Montrons que $\lambda g + (1-\lambda)h \in B'(0,1) \setminus \{f\}$. Si $\|g\|_2 < 1$ ou $\|h\|_2 < 1$, alors par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme,

$$\|\lambda g + (1-\lambda)h\|_2 < 1$$

et donc $\lambda g + (1-\lambda)h \in B'(0,1) \setminus \{f\}$.

On suppose donc $\|g\|_2 = 1$ et $\|h\|_2 = 1$. On va montrer de même que $\|\lambda g + (1-\lambda)h\|_2 < 1$.

Par l'absurde, supposons que $\|\lambda g + (1-\lambda)h\|_2 = 1$. (par inégalité triangulaire et homogénéité, on sait que $\|\lambda g + (1-\lambda)h\|_2 \leq 1$.)

On a alors, en élevant cette égalité au carré et en revenant au produit scalaire,

$$1 = \lambda^2\|g\|_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)(g|h) + (1-\lambda)^2\|h\|_2^2$$

et donc $1 = (g|h)$. On est alors dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h = \alpha g$. En injectant dans $1 = (g|h)$, on en déduit que $\alpha = 1$, donc $g = h$: contradiction.

Pour la norme de la convergence uniforme.

Soit f un point extrémal. $\|f\|_\infty = 1$. Supposons qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $|f(x_0)| < 1$. On pose f_+ et f_- les parties positives et négatives de f. On a $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$. Posons $g = 1 - 2f_-$ et $h = 2f_+ - 1$. On a bien g et h continues sur $[0,1]$, g et h sont dans la boule unité fermée. $f = \frac{1}{2}(g+h)$, or $g \neq f$ et $h \neq f$, sinon, $|f| = 1$, ce qui contredit f point extrémal de la boule unité fermée. Donc $|f| = 1$. f ne s'annule donc pas. Comme f est continue, f est de signe constant et finalement, $f = 1$ ou $f = -1$. Les deux fonctions constantes en 1 ou -1 sont donc les seuls points extrémaux possibles. On vérifie facilement que ces deux fonctions sont des points extrémaux.

Planche 11 L

Déterminer toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x+t) - f(x)}{t^2} dt$ converge.

Indication 11 Que se passe-t-il si on suppose de plus f dérivable ?

Solution 11

Supposons f dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $f'(x) \neq 0$. Alors au voisinage de 0

$$\frac{f(x+t) - f(x)}{t^2} \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{f'(x)}{t}$$

et l'intégrale diverge : contradiction. Donc $f'(x) = 0$. Comme c'est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est constante.

Les fonctions constantes sont clairement des solutions du problème. Montrons que ce sont les seules. Soit f continue (on ne la suppose plus dérivable) solution du problème, non constante. On choisit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f(a) < f(b)$ par exemple. On va chercher un point c de $[a,b]$ au voisinage duquel le graphe de la fonction f est au dessus de la droite passant en $(c, f(c))$ et de pente $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.
(On s'inspire de la démonstration du théorème des accroissements finis.)

On pose donc $g : t \mapsto f(t) - f(a) - (t-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Supposons $g = 0$, alors pour $t \in]0, b-a]$, $\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t^2} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\dfrac{1}{t}$ et donc l'intégrale du début n'est pas définie en a ce qui est absurde. g est donc non nulle.
Quitte à changer f en $-f$ (qui est aussi solution non constante du problème) on peut supposer que g prend une valeur strictement négative. On a, par ailleurs, $g(a) = g(b) = 0$. Donc le minimum de g sur $[a, b]$, qui existe bien puisque g est continue sur le segment $[a, b]$, est atteint en $c \in]a, b[$. Pour $t > 0$ proche de 0, on a $g(c+t) - g(c) \geq 0$ et donc

$$f(c+t) - f(c) - t\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0.$$

On obtient alors, pour t dans un voisinage à droite de 0,

$$\frac{f(c+t)-f(c)}{t^2} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{1}{t}$$

et l'intégrale du début n'est pas définie en c : contradiction. f est donc contante.

Planche 12 P

1. Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limites uniformes sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes réels.

2. Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Indication 12 Pour 2 : penser au théorème de Weierstrass.

Solution 12

1. Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ limite uniforme d'une suite de polynômes réels (P_n) sur $\mathbb{R}$.
   Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$n \geq n_0 \implies \|f - P_n\|_\infty \leq 1.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $\|P_n - P_{n_0}\|_\infty \leq 2$. $P_n - P_{n_0}$ est donc une fonction polynomiale bornée : elle est constante. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, il existe $c_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n = P_{n_0} + c_n$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $c_n = P_n(0) - P_{n_0}(0)$ et comme $(P_n(0))$ converge vers $f(0)$ (la convergence uniforme implique la convergence simple), (c_n) converge. On note c sa limite.
   Soit $x \in \mathbb{R}$: $(P_n(x))$ converge vers $f(x)$, or, pour $n \geq n_0$, $P_n(x) = P_{n_0}(x) + c_n$ et donc $(P_n(x))$ converge vers $P_{n_0}(x) + c$. Par unicité de la limite,

   $$f(x) = P_{n_0}(x) + c$$

   f est une fonction polynomiale.
   Réciproquement, les fonctions polynomiales sont bien limites uniformes sur $\mathbb{R}$ de suites de fonctions polynomiales.

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$. Alors par le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe P_n polynôme à coefficients réels tels que

$$\|f - P_n\|_{\infty,[-n,n]} \leq 2^{-n}.$$

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $[a, b] \subset [-n_0, n_0]$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Alors

$$\|f - P_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \|f - P_n\|_{\infty,[-n,n]} \leq 2^{-n}$$

puisque $[a, b] \subset [-n_0, n_0] \subset [-n, n]$.
On en déduit que la suite $(\|f - P_n\|_{\infty,[a,b]})$ converge vers 0 et donc que (P_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Planche 13 PLCR
On admet le théorème suivant : si une série entière a un rayon de convergence infini et si sa somme est bornée sur $\mathbb{C}$, alors cette somme est constante.
On note G l'ensemble des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continues telles que pour tout $\alpha \geq 0$, $t \mapsto e^{\alpha|t|} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in G$ et x réel, on pose $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ixt}dt$.

1. Montrer que G ne contient pas que la fonction nulle.
2. Soit $f \in G$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Soient $f \in G$, $a \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. On pose $\varphi_a(z) = \displaystyle\int_a^{+\infty} e^{iz(t-a)} f(t)dt$. Montrer que φ_a est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et est bornée sur le demi-plan $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.
4. Soit $f \in G$ telle que $\hat{f} = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(t-a)} f(t)dt$ est nul pour tous a, z. En déduire que φ_a est, pour tout $a \in \mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{C}$.
5. Montrer que $f \mapsto \hat{f}$ est injective.

Indication 13 Pour 3, on pourra passer par le théorème de convergence dominée pour intervertir somme et intégrale.

Solution 13

1. $t \mapsto e^{-t^2} \in G$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   • Soit $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t)e^{ixt}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et pour $l \in [\![1, k]\!]$, sa dérivée l-ième est $x \mapsto (it)^l f(t)e^{ixt}$.
   • Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $l \in [\![0, k-1]\!]$, $t \mapsto (it)^l f(t)e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $t \in \mathbb{R}$,
   $$|(it)^l f(t)e^{ixt}| \leq |t^l|\ |f(t)| \leq |t^l|e^{-|t|}\ |f(t)|e^{|t|}.$$
   Par croissances comparées, $|t^l|e^{-|t|}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, et $t \mapsto f(t)e^{|t|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par comparaison, $t \mapsto (it)^l f(t)e^{ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   • Soit $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto (it)^k f(t)e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   • Soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$,
   $$|(it)^k f(t)e^{ixt}| \leq \varphi(t)$$
   avec $\varphi : t \mapsto |t|^k e^{-|t|}\ |f(t)|e^{|t|}$. On montre comme précédemment que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   On peut donc appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre : $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. Comme c'est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $(a,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $g_n : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{i^k(t-a)^k z^k}{k!} f(t)$.
   - Chaque g_n est continue sur $[a, +\infty[$.
   - (g_n) converge simplement vers $t \mapsto e^{iz(t-a)} f(t)$, continue sur $\mathbb{R}$.
   - Pour $n \in \mathbb{N}$, pour $t \in \mathbb{R}$
   $$|g_n(t)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|t-a|^k |z|^k}{k!} |f(t)| \leq e^{|z|\,|t-a|} |f(t)|.$$

   Or $t \mapsto e^{|z|\,|t-a|}|f(t)|$ est intégrable. On peut appliquer le théorème de convergence dominée. On en déduit, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\int_a^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k(t-a)^k z^k}{k!} f(t) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^{+\infty} \frac{i^k(t-a)^k z^k}{k!} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_a^{+\infty} \frac{i^k(t-a)^k}{k!} f(t)dt \right) z^k,$$
   que chacun des membres possède une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et qu'à la limite on obtient
   $$\varphi_a(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} \frac{i^k(t-a)^k}{k!} f(t)dt \right) z^k.$$
   φ_a est donc bien développable en série entière sur $\mathbb{C}$.
   Par ailleurs, si on suppose que $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, en écrivant $z = x + iy$, on a
   $$\varphi_a(z) = \int_a^{+\infty} e^{ix(t-a)} e^{-y(t-a)} f(t)dt$$
   f étant intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[a, +\infty[$, on a
   $$|\varphi_a(z)| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|dt.$$
   φ_a est bien bornée sur le demi-plan $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

4. $\hat{f}$ étant nulle, toutes ses dérivées sont aussi nulles. Avec 2, on peut écrire que toutes les dérivées en 0 sont nulles et donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)dt = 0.$$
   Or, on peut adapter le raisonnement de 3. pour écrire pour $(a,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(t-a)} f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n z^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)^n f(t)dt.$$
   En développant chaque intégrale par linéarité et à l'aide du binôme de Newton, le résultat qui précède donne que toutes ces intégrales sont nulles et donc que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(t-a)} f(t)dt = 0.$$
   On écrit $z = x + iy$ avec $y < 0$. On a alors
   $$\varphi_a(z) = -\int_{-\infty}^{a} e^{i(x+iy)(t-a)} f(t)dt = -\int_{-\infty}^{a} e^{ix(t-a)} e^{-y(t-a)} f(t)dt.$$
   Or, pour tout $t \in]-\infty, a]$, $-y(t-a) \leq 0$ ainsi, f étant intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-\infty, a]$,
   $$|\varphi_a(z)| \leq \int_{-\infty}^{a} |f(t)|.$$
   Ainsi, avec 3, φ_a est bien bornée sur $\mathbb{C}$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$. φ_a est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et est bornée sur $\mathbb{C}$, avec le théorème admis, φ_a est constante. En particulier, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_a(x) = \varphi_a(0)$ et donc
$$\int_a^{+\infty} e^{ixt} f(t)dt = e^{ixa} \int_a^{+\infty} f(t)dt.$$
A x fixé, on peut dériver cette expression selon a :
$$-e^{ixa} f(a) = ixe^{ixa} \int_a^{+\infty} f(t)dt - e^{ixa} f(a)$$
et finalement, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = 0$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$, en dérivant à nouveau suivant a, on obtient pour tout $a \in \mathbb{R}$, $-f(a) = 0$.
$f \mapsto \hat{f}$ est linéaire, on vient de montrer que son noyau est réduit au singleton 0, donc cette application est injective.

Planche 14 CR
Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f''(x) = f(x)$.

2. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Indication 14 Réécrire f avant d'appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, avec une intégration par parties.

Solution 14
Tout d'abord on peut affirmer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, car $t \mapsto \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et majorée en valeur absolue par $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On remarque ensuite que f est une fonction paire. Elle vaut π en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \pi$. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$ est paire, on peut donc réécrire $f(x) = 2 \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt$.

1. Par parité, il suffit de montrer le résultat sur $\mathbb{R}_+^*$.
Avant d'appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, on réécrit f.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on effectue une intégration par parties avec $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{x}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, de sorte à augmenter les puissances de t au dénominateur. Le produit de ces deux fonctions possède des limites nulles en 0 et en $+\infty$. La première intégrale étant convergente, les deux le sont et on obtient
$$f(x) = \frac{4}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)t}{(1+t^2)^2} dt.$$
On définit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)t}{(1+t^2)^2} dt$. On va montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. f le sera alors également, par produit.
• Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{\sin(tx)t}{(1+t^2)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée première est $x \mapsto \frac{t^2\cos(tx)}{(1+t^2)^2}$.
• Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{t^2\cos(tx)}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
• Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour $t \in \mathbb{R}_+$,
$$\left| \frac{t^2\cos(tx)}{(1+t^2)^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Or $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On peut donc appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre : g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(tx)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}f(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2}dt.$$

f est donc aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On applique à nouveau le théorème de dérivation à la dernière intégrale : g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g''(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}f'(x) + g(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{x}{4}f(x).$$

On obtient donc que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2}g(x) + \frac{4}{x}g'(x) \quad \text{puis} \quad f''(x) = \frac{8}{x^3}g(x) - \frac{8}{x^2}g'(x) + \frac{4}{x}g''(x).$$

Il vient alors

$$f''(x) = \frac{8}{x^3}g(x) - \frac{8}{x^2}g'(x) + \frac{4}{x}\left(\frac{1}{2}f'(x) + \frac{x}{4}f(x)\right) = f(x).$$

2. On sait alors qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que
• pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = ae^x + be^{-x}$
• pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = ce^x + de^{-x}$.
On sait par ailleurs, que $f(0) = \pi$. Enfin, f est continue sur $\mathbb{R}$ (le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre s'applique aisément, avec $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ comme fonction de domination).
On traduit la continuité à droite et à gauche en 0 : $b = \pi - a$ et $d = \pi - c$.
La parité de f donne $c = \pi - a$.
On écrit la dérivée première sur $\mathbb{R}_+^*$. Il vient, pour $x > 0$, $f'(x) = ae^x - (\pi - a)e^{-x}$. Cette quantité possède une limite en 0^+ et $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 2a - \pi$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, par parité, cette limite doit être nulle. On a donc $a = \frac{\pi}{2}$ et finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \pi\mathrm{ch}(x)$.
Il vient alors, d'une part,

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{\pi}{x} \underset{x\to 0^+}{\to} 0.$$

Ce qui est bien cohérent avec une dérivée nulle en 0.
Mais en revenant à la définition de f et avec le changement de variable $u = tx$, pour $x > 0$, on a d'autre part

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{\pi}{x} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u) - 1}{x^2 + u^2}du.$$

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée à cette dernière intégrale pour prouver qu'elle converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u) - 1}{u^2}du$ lorsque x tend vers 0. On peut prendre comme fonction de domination $u \mapsto \frac{2}{u^2}$ si $u \geq 1$ et $u \mapsto \frac{1}{2}$ si $u < 1$.
Par unicité de la limite, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u) - 1}{u^2}du = 0.$$

Or il s'agit d'une intégrale d'une fonction continue, de signe constant, non nulle : on a une contradiction. f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Planche 15 CR
On note E l'ensemble des fonctions $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ continûment dérivables et bornées. Soit a un réel strictement positif. Si $f \in E$, on considère $(\mathcal{E}_f)$ l'équation différentielle $y' - ay + f = 0$.

1. Exprimer les solutions de $(\mathcal{E}_f)$. Montrer qu'une et une seule de ces solutions est dans E. On la note $\Phi(f)$.

2. Montrer que Φ est un endomorphisme injectif de E. Déterminer les valeurs propres de Φ.

3. Soit f dans E, positive et intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer que $\Phi(f)$ est positive et intégrable sur $[1,+\infty[$.

Indication 15 Pour la troisième question, il suffit de montrer que les intégrales partielles sont bornées.

Solution 15

1. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{ax}$. On utilise alors la méthode de variation de la constante pour trouver que les solutions de $(\mathcal{E}_f)$ s'écrivent
$$x \mapsto e^{ax}\left(\lambda - \int_1^x e^{-at} f(t)dt\right)$$
avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On cherche, parmi ces solutions, lesquelles sont bornées. Si une telle fonction est bornée, alors multipliée par $x \mapsto e^{-ax}$ elle converge vers 0 en $+\infty$. On a donc $\lambda - \int_1^x e^{-at} f(t)dt$ qui converge vers 0 en $+\infty$. Or, f étant bornée, $t \mapsto e^{-at}f(t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et la limite précédente donne $\lambda = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)dt$. Si une solution est bornée, elle est unique.
Réciproquement, posons $\lambda = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)dt$. Alors la solution y correspondante s'écrit
$$x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt.$$
On note M un majorant de $|f|$. On a, pour $x \in [1,+\infty[$,
$$|y(x)| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} M dt \leq \frac{M}{a}.$$
y est bien bornée.
Finalement, on a, pour $x \in [1,+\infty[$,
$$\Phi(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt.$$

2. Φ est linéaire par linéarité de l'intégrale. Pour $f \in E$, $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et est bornée par construction. $\Phi(f) \in E$. On a bien montré que Φ est un endomorphisme de E.
Soit $f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. On a alors, pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt = 0$. En dérivant, on obtient, pour tout $x \in [1,+\infty[$, $-e^{-ax} f(x) = 0$ et donc on a bien $f = 0$: ϕ est injectif.
Soit λ une valeur propre de Φ. Par ce qui précède, $\lambda \neq 0$. Soit f un vecteur propre associé. On a, pour tout $x \in [1,+\infty[$:
$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt = \lambda e^{-ax} f(x).$$

On dérive, on a alors pour tout $x \in [1, +\infty[$

$$f'(x) + \left(\frac{1}{\lambda} - a\right) f(x) = 0.$$

On en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in [1, +\infty[$ $f(x) = \alpha e^{-\left(\frac{1}{\lambda}-a\right)x}$. Mais f est bornée, on a doit donc avoir $\left(\frac{1}{\lambda} - a\right) \geq 0$, i.e. $0 < \lambda \leq \frac{1}{a}$.
Réciproquement, si on choisit $\lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$, et si on pose $f : x \mapsto e^{-\left(\frac{1}{\lambda}-a\right)x}$. f est bien dans E et $\Phi(f) = \lambda f$ et donc λ est bien valeur propre.
Finalement, les valeurs propres de Φ sont tous les réels de $\left]0, \frac{1}{a}\right]$.

3. Soit $f \in E$, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$. $\Phi(f)$ est bien continue et positive sur $[1, +\infty[$. Il reste à montrer qu'elle est intégrable sur $[1, +\infty[$. Pour cela, il suffit de montrer que les intégrales partielles sont bornées.
Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^x \Phi(f)(t)dt = \frac{1}{a}\int_1^x \Phi(f)'(t)dt + \frac{1}{a}\int_1^x f(t)dt = \frac{1}{a}\left(\Phi(f)(x) - \Phi(f)(1)\right) + \frac{1}{a}\int_1^x f(t)dt.$$

Or $\Phi(f)$ est bornée, ainsi que $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$, puisque f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Par combinaison linéaire de fonctions bornées, $x \mapsto \int_1^x \Phi(f)(t)dt$ est bien bornée et $\Phi(f)$ est bien intégrable sur $[1, +\infty[$.

Planche 16 CR
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle : $(\mathcal{E})$ $X' = AX$.

1. Montrer que toute solution de $(\mathcal{E})$ est à valeurs dans un sous-espace affine de direction $\mathrm{Im}(A)$.

2. On suppose A antisymétrique. Montrer que toute solution de $(\mathcal{E})$ est de norme constante.
Dans le cas où $n = 3$, que dire de la trajectoire d'une solution ?

3. On suppose que toute solution de $(\mathcal{E})$ est de norme constante. Montrer que A est antisymétrique.

Indication 16

Solution 16

1. Soit X une solution de $(\mathcal{E})$. On sait alors que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = e^{tA}X(0)$. Or,

$$e^{tA} = I_n + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!}A^k.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!}A^k$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(t)X(0) \in \mathrm{Im}(A)$, puisque la somme commence à $k = 1$. $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, donc c'est un fermé. On en déduit, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ ($M \mapsto MX(0)$ étant continue, car linéaire en dimension finie) que $X(t) - X(0) \in \mathrm{Im}(A)$. X est bien à valeurs dans le sous-espace affine $X(0)+ \mathrm{Im}(A)$.

2. Soit X une solution. Soit $t \in \mathbb{R}$. $X(t)^T = X(0)^T e^{tA^T} = X(0)^T e^{-tA}$ puisque A est antisymétrique. On a alors $\|X(t)\|^2 = X(0)^T e^{-tA} e^{tA} X(0)$. Mais A et $-A$ commutent, donc $\|X(t)\|^2 = X(0)^T e^{-tA+tA} X(0)$ et finalement, $\|X(t)\|^2 = \|X(0)\|^2$: toute solution est de norme constante.

Supposons que $n = 3$. $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = -\det(A)$. Finalement, $\det(A) = 0$. Le rang de A est donc 0, 1 ou 2.
Si $\text{rg}(A) = 0$, alors $A = 0$ et X est constant.
Si $\text{rg}(A) = 1$ les trois colonnes de A sont liées. Or $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$. Chaque paire de colonnes est liée. En écrivant que leur produit vectoriel est nul, on trouve $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Finalement, $A = 0$: contradiction. Donc, le rang de A ne peut pas être 1.
Si $\text{rg}(A) = 2$, alors l'image de A est un plan. Chaque solution est à valeurs dans un plan affine et est de norme constante. Chaque solution est à valeurs dans un cercle.

3. Supposons que chaque solution soit de norme constante. Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note X la solution $(\mathcal{E})$ de condition initiale X_0. La dérivée de $t \mapsto \|X(t)\|^2$ est nulle. On obtient $2(AX(t)|X(t)) = 0$. En particulier, $(AX_0|X_0) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a aussi, pour tout $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, $(AX|Y) = -(X|AX)$ ($X_0 = X+Y$). On a bien que A est antisymétrique (on peut passer par exemple par les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, qui est aussi une base orthonormée pour le produit scalaire canonique).

Planche 17 P
On considère des variables aléatoires réelles X,Y et Z, discrètes. On suppose que $X+Y$ suit la même loi que $X+Z$.

1. Peut-on affirmer que Y et Z suivent la même loi ?
2. Et si X, Y et Z sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$?
3. Et si X, Y et Z sont indépendantes et bornées ?

Indication 17 1. Trouver un contre-exemple simple. 2. Penser aux fonctions génératrices. 3. Prouver que Y et Z ont les mêmes moments, puis passer à l'espérance d'une fonction de Y ou Z, avec f continue par le théorème de Weierstrass.

Solution 17

1. On prend $\Omega = \{a, b\}$, la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et on prend la probabilité uniforme : $\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{2}$. On définit X par : $X(a) = 0$, $X(b) = 1$, Y par : $Y(a) = 0$, $Y(b) = 0$, et Z par $Z(a) = 1$, $Z(b) = -1$. On a alors $(X+Y)(a) = 0$ et $(X+Y)(b) = 1$ ainsi que $(X+Z)(a) = 1$ et $(X+Z)(b) = 0$. On a donc $\mathbb{P}(X+Y = 0) = \mathbb{P}(X+Y = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X+Z = 0) = \mathbb{P}(X+Z = 1) = \frac{1}{2}$. $X+Y$ et $X+Z$ ont même loi. Alors que Y et Z n'ont pas la même loi (elles ne prennent déjà pas les mêmes valeurs).

2. On utilise les fonctions génératrices de X, Y et Z. Soit $t \in [-1, 1]$, $G_{X+Y}(t) = G_{X+Z}(t)$, puisque $X+Y$ et $X+Z$ ont même loi. Mais comme les variables aléatoires sont indépendantes, $G_X(t)G_Y(t) = G_X(t)G_Z(t)$. Pour $t \in]0, 1]$, $G_X(t) > 0$, donc $G_Y(t) = G_Z(t)$. L'unicité du développement en série entière, donne l'égalité des coefficients de G_X et de G_Z, i.e. Y et Z ont même loi.

3. X, Y et Z étant bornées, elles ont des moments de tout ordre. On montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathbb{E}(Y^n) = \mathbb{E}(Z^n)$. Par linéarité, on montre ensuite que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\mathbb{E}(P(Y)) = \mathbb{E}(P(Z))$.
On note $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, qui contient $Y(\Omega)$ et $Z(\Omega)$. Soit f une fonction continue sur

$[a,b]$. Il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ par le théorème de Weierstrass. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{E}(f(Y)) - \mathbb{E}(P_n(Y))| \leq |\mathbb{E}(f(Y) - P_n(Y))| \leq \mathbb{E}(|f(Y) - P_n(Y)|) \leq \mathbb{E}(\|f - P_n\|_\infty) \leq \|f - P_n\|_\infty.$$

On en déduit donc que $(\mathbb{E}(P_n(Y)))$ converge vers $\mathbb{E}(f(Y))$. Avec ce qui précède et par unicité de la limite, $\mathbb{E}(f(Y)) = \mathbb{E}(f(Z))$.
Soit y une valeur atteinte par Y. $y \in [a,b]$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n la fonction affine par morceaux, qui vaut 1 en y, 0 avant $y - \frac{1}{n}$ et après $y + \frac{1}{n}$. Le résultat précédent montre que $\mathbb{E}(f_n(Y)) = \mathbb{E}(f_n(Z))$. Montrons que $(\mathbb{E}(f_n(Y)))$ converge vers $\mathbb{P}(Y = y)$. On pourra alors en déduire que Y et Z ont même loi.
Notons $Y(\Omega) = \{y_l \mid l \in \mathbb{N}\}$. On note $k \in \mathbb{N}$ tel que $y = y_k$. On a, par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(f_n(Y)) = \mathbb{P}(Y = y) + \sum_{l \neq k} f(y_l)\mathbb{P}(Y = y_l).$$

Donc

$$0 \leq \mathbb{E}(f_n(Y)) - \mathbb{P}(Y = y) \leq \sum_{l \neq k} f(y_l)\mathbb{P}(Y = y_l) \leq \mathbb{P}\left(Y \in \left[y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right] \setminus \{y\}\right).$$

Or $\left(\left[y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right] \setminus \{y\}\right)$ est une suite décroissante d'événements, d'intersection vide. Par continuité décroissante, $\left(\mathbb{P}\left(Y \in \left[y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right] \setminus \{y\}\right)\right)$ converge vers 0. Par encadrement, on peut conclure.

Planche 18 P
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice aléatoire $M_n = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où les $X_{i,j}$ sont des variables de Rademacher indépendantes, $\mathbb{P}(X_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(X_{i,j} = -1) = \frac{1}{2}$.

1. Calculer $\mathbb{E}(\det(M_n))$ et $\mathbb{V}(\det(M_n))$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = {}^tAA$. Montrer : $\det(B) \leq \prod_{i=1}^{n} b_{i,i}$.
3. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que, quand $n \to +\infty$, $\mathbb{P}(|\det(M_n)| = n^{n/2}) = \mathcal{O}(a^n)$.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Que dire de $\mathbb{P}(|\det(M_n)| \geq n^{n/2-\varepsilon})$?

Indication 18 Pour 2., penser à Gram-Schmidt.

Solution 18

1. On remarque tout d'abord, que pour tout (i,j) dans $[\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(X_{i,j}) = 0$ et $\mathbb{V}(X_{i,j}) = 1$.
On sait que

$$\det(M_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)}.$$

Par linéarité de l'espérance, puis indépendance des $X_{i,j}$

$$\mathbb{E}(\det(M_n)) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)}\right) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_{i,\sigma(i)}\right) = 0.$$

Développons le déterminant suivant la dernière ligne :

$$\det(M_n) = \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}(-1)^{n+k}\det(M_n^{n,k})$$

où $M_n^{n,k}$ est la matrice M_n à laquelle on a oté la dernière ligne et la colonne k.
La formule de Huyghens donne

$$\mathbb{V}(\det(M_n)) = \mathbb{E}(\det(M_n)^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{n,k}^2\det(M_n^{n,k})^2 + 2\sum_{1\leq k<l\leq n} X_{n,k}X_{n,l}(-1)^{k+l}\det(M_n^{n,k})\det(M_n^{n,l})\right)$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{V}(\det(M_n)) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_{n,k}^2\det(M_n^{n,k})^2\right) + 2\sum_{1\leq k<l\leq n}(-1)^{k+l}\mathbb{E}(X_{n,k}X_{n,l}\det(M_n^{n,k})\det(M_n^{n,l})).$$

D'une part, $X_{n,k}^2$ est indépendante de $\det(M_n^{n,k})^2$ par le lemme des coalitions.
D'autre part, $X_{n,k}X_{n,l}$ et $\det(M_n^{n,k})\det(M_n^{n,l})$ sont aussi indépendantes par le lemme des coalitions. On a donc

$$\mathbb{V}(\det(M_n)) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_{n,k}^2\right)\mathbb{E}\left(\det(M_n^{n,k})^2\right)+2\sum_{1\leq k<l\leq n}(-1)^{k+l}\mathbb{E}(X_{n,k}X_{n,l})\mathbb{E}(\det(M_n^{n,k})\det(M_n^{n,l})).$$

Pour la dernière somme, par indépendance, $\mathbb{E}(X_{n,k}X_{n,l}) = \mathbb{E}(X_{n,k})\mathbb{E}(X_{n,l}) = 0$. Il reste

$$\mathbb{V}(\det(M_n)) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_{n,k}^2\right)\mathbb{E}\left(\det(M_n^{n,k})^2\right).$$

Or $\mathbb{E}(X_{n,k}^2) = 1$ et $\mathbb{E}\left(\det(M_n^{n,k})^2\right) = \mathbb{V}(\det(M_{n-1}))$. On obtient donc la formule de récurrence

$$\mathbb{V}(\det(M_n)) = n\mathbb{V}(\det(M_{n-1})).$$

On montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que $\mathbb{V}(\det(M_n)) = n!$.

2. On remarque tout d'abord que $B \in S_n^+(\mathbb{R})$. Le déterminant de B est donc positif.
Si ce déterminant est nul, comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_{i,i} = {}^tE_iBE_i = {}^tE_i\,{}^tAAE_i = \|AE_i\|^2$, on a bien $b_{i,i} \geq 0$ et donc la formule voulue est vraie.
Sinon, le déterminant de B est strictement positif, et donc A est inversible. L'orthonormalisation de ses colonnes conduit à écrire $A = \Omega T$, avec $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure. On a alors $B = {}^tTT$ et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $b_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} T_{k,i}^2$. Or, puisque T est triangulaire

$$\det(B) = \det(T)^2 = \prod_{i=1}^{n} T_{i,i}^2 \leq \prod_{i=1}^{n} b_{i,i}.$$

3. Appliquons l'inégalité précédente avec $A = M_n$, on obtient

$$\det(M_n)^2 \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{k,i}^2\right) \leq n^n.$$

L'événement $(|\det(M_n)| = n^{n/2})$ correspond donc au cas d'égalité dans l'inégalité précédente. En reprenant la démonstration précédente, cela correspond au cas où T est diagonale, i.e. les colonnes de A sont déjà orthogonales :

$$(|\det(M_n)| = n^{n/2}) = \bigcap_{1\leq i<j\leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} X_{k,i}X_{k,j} = 0 \right).$$

Cet événement est contenu dans l'événement

$$\left(\sum_{k=1}^{n} X_{k,1}X_{k,2} = 0 \right) \cap \left(\sum_{k=1}^{n} X_{k,3}X_{k,4} = 0 \right) \cap \cdots \cap \left(\sum_{k=1}^{n} X_{k,p-1}X_{k,p} = 0 \right)$$

avec $p = n$ si n est pair et $p = n-1$ si n est impair, i.e. $p = 2q$ avec $q = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ce dernier événement est l'intersection d'événements indépendants (lemme des coalitions) et donc sa probabilité est b^q, où $b = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{k,1}X_{k,2} = 0 \right)$, puisque tous les $X_{i,j}$ suivent la même loi. $b \in [0,1]$. Par croissance d'une probabilité, il vient

$$\mathbb{P}(|\det(M_n)| = n^{n/2}) \leq b^q.$$

Tout d'abord, $b < 1$, car $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{k,1}X_{k,2} = n \right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{k,1} = 1)\mathbb{P}(X_{k,2} = 1) = \frac{1}{4^n} > 0$.
Si $b = 0$, on peut majorer b par $\frac{1}{2}$ par exemple. On suppose donc par la suite que $b \in]0,1[$. Il vient alors $b^q = e^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ln(b)} \leq e^{\left(\frac{n}{2}-1\right)\ln(b)} \leq \frac{1}{b}\left(\sqrt{b}\right)^n$.
En posant $a = \sqrt{b}$, on a bien $\mathbb{P}(|\det(M_n)| = n^{n/2}) = \mathcal{O}(a^n)$, avec $a \in]0,1[$.
Plus simplement on peut appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $\det(M_n^T M_n)$ qui est bien à valeurs positives. Son espérance est la variance calculée en 1. On a donc

$$\mathbb{P}(\det(M_n^T M_n) \geq n^n) \leq \frac{n!}{n^n}.$$

Avec l'équivalent de Stirling, on a $\frac{n!}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ et donc

$$\mathbb{P}(\det(M_n^T M_n \geq n^n) = O\left(a^n\right)$$

avec $a = \frac{1}{e} \in]0,1[$.
Or la question 2. donne $\det(M_n^T M_n) \leq n^n$, donc $\mathbb{P}(\det(M_n^T M_n \geq n^n) = \mathbb{P}(\det(M_n^T M_n) = n^n)$ et donc on peut conclure.

4. Comme $\mathbb{E}(\det(M_n)) = 0$, on peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour obtenir

$$\mathbb{P}(|\det(M_n)| \geq n^{n/2-\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{V}(\det(M_n))}{\left(n^{n/2-\varepsilon}\right)^2} \leq \frac{n!}{n^{n-2\varepsilon}}.$$

On utilise alors la formule de Stirling :

$$\frac{n!}{n^{n-2\varepsilon}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} e^{-n}$$

pour obtenir

$$\mathbb{P}(|\det(M_n)| \geq n^{n/2-\varepsilon}) = \mathcal{O}\left(n^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} e^{-n}\right) \quad [n \to +\infty].$$

En particulier, cette probabilité converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Planche 19 X

1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que $x^2 = x$ pour tout $x \in A$. Montrer que A est commutatif.

2. Montrer que la conclusion subsiste si on suppose $x^4 = x$ pour tout $x \in A$ ou bien si on suppose $x^3 = x$ pour tout $x \in A$.

Indication 19 Pour la deuxième question, on pourra montrer qu'un élément $x \in A$ vérifiant $x^2 = x$ (ou $x(x-1) = 0$) [on dit qu'il est idempotent] commute avec tous les éléments de A [on dit que x est central].

Solution 19

1. Soient x et y dans A.
   <u>Première version</u> $(x+y)^2 = x+y$. Il vient $x^2 + xy + yx + y^2 = x + y$ et donc $xy + yx = 0$, ou encore, $xy = -yx$. Mais, pour tout $t \in A$, $t = -t$ (en effet, $t = t^2 = (-t)^2 = -t$). D'où $xy = yx$.
   <u>Deuxième version</u> $(xy(x-1))^2 = xy(x-1)$, donc $xy(x-1)xy(x-1) = xy(x-1)$ et ainsi $0 = xy(x-1)$, ce qui s'écrit aussi $xyx = xy$. Mais de la même manière, en utilisant $(x-1)yx$, on obtient $xyx = yx$ et finalement, $xy = yx$.
   On a ainsi montré que tout élément idempotent (x) est central.

2. <u>Suppose tout d'abord que $x^4 = x$ pour tout $x \in A$.</u>
   Soit $x \in A$, $x^4 = x$, en multipliant par x^2 de chaque côté, $x^6 = x^3$ et donc x^3 est idempotent. Il est donc central (on adapte la deuxième version de la question précédente : pour $y \in A$ $(x^3y(x^3-1))^4 = x^3y(x^3-1)$, donc $x^3y(x^3-1)x^3y(x^3-1)x^3y(x^3-1)x^3y(x^3-1) = x^3y(x^3-1)$ et ainsi $0 = x^3y(x^3-1)$, ce qui s'écrit aussi $x^3yx^3 = x^3y$. Mais de la même manière, en utilisant $(x^3-1)yx^3$, on obtient $x^3yx^3 = yx^3$ et finalement, $x^3y = yx^3$).
   On vient de montrer que tout cube est central.
   Soit $x \in A$, $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ et donc $3x^2 + 3x = (x+1)^3 - x^3 - 1$ est central (1).
   De même, en écrivant $(x+1)^4 = x+1$, il vient $4x^3 + 6x^2 + 4x = 0$ et donc $6x^2 + 4x$ est central (2).
   (1) et (2) donnent $2x$ central : on a montré que tout double est central et avec (1), $x^2 + x$ est central (3).
   Soient x et y dans A. $(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$. Alors $xy + yx = (x+y)^2 + (x+y) - (x^2 + x) - (y^2 + y)$ est central, donc commute avec x : $(xy+yx)x = x(xy+yx)$, il vient $yx^2 = x^2y$.
   On vient de montrer que tout carré est central (4).
   (3) et (4) donnent x central.
   <u>Suppose ensuite que $x^3 = x$ pour tout $x \in A$.</u>
   Soit $x \in A$, $x^3 = x$, en multipliant par x de chaque côté, $x^4 = x^2$ et donc x^2 est idempotent. Il est donc central (on adapte la deuxième version de la question précédente : pour $y \in A$ $(x^2y(x^2-1))^3 = x^2y(x^2-1)$, donc $x^2y(x^2-1)x^2y(x^2-1)x^2y(x^2-1) = x^2y(x^2-1)$ et ainsi $0 = x^2y(x^2-1)$, ce qui s'écrit aussi $x^2yx^2 = x^2y$. Mais de la même manière, en utilisant $(x^2-1)yx^2$, on obtient $x^2yx^2 = yx^2$ et finalement, $x^2y = yx^2$).
   On vient de montrer que tout carré est central.
   Soit $x \in A$, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, donc $2x = (x+1)^2 - x^2 - 1$ est central (5).
   On a aussi $(x+1)^3 = (x+1)$ et donc $3x^2 + 3x = 0$: $3x = -3x^2$ est central (6).
   (5) et (6) donnent x central.

Planche 20 X
Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, quel est le signe de $P(x)P''(x) - P'(x)^2$?

Indication 20 Penser au théorème de Rolle.

Solution 20

1. On écrit $P = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k}$ avec $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ et les $m_k \in \mathbb{N}^*$. Si on note $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P, on a $n = \sum_{k=1}^{p} m_k$.
   Pour $k = 1 \cdots p - 1$, on peut appliquer le théorème de Rolle entre α_k et α_{k+1} : il existe $\beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $P'(\beta_k) = 0$. Posons
$$Q = \prod_{k=1}^{p-1} (X - \beta_k) \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k - 1}.$$
   On sait alors que Q divise P'. Mais le degré de Q vaut $p - 1 + \sum_{k=1}^{p} (m_k - 1) = n - 1$. Donc P' et Q sont associés, i.e. il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $P' = \mu Q$. Les racines multiples de P' se trouvent parmi les α_k, i.e. parmi les racines de P. (Ce sont les racines de P qui ont un ordre de multiplicité supérieur à 3.)

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $P(x) \neq 0$.
$$\frac{P(x)P''(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} = \left(\frac{P'}{P}\right)'(x).$$
   $P(x)P''(x) - P'(x)^2$ est donc de même signe que $\left(\frac{P'}{P}\right)'(x)$.
   Reprenons les notations de la question précédente et décomposons en éléments simples $\frac{P'}{P}$:
$$\frac{P'}{P} = n\frac{\prod_{k=1}^{p-1} (X - \beta_k)}{\prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\gamma_k}{X - \alpha_k}.$$
   Il s'en suit d'une part que
$$\left(\frac{P'}{P}\right)' = \sum_{k=1}^{p} \frac{-\gamma_k}{(X - \alpha_k)^2}.$$
   D'autre part, pour $i \in [\![1, p]\!]$,
$$\gamma_i = \left((X - \alpha_i)\frac{P'}{P}\right)(\alpha_i) = n\frac{\prod_{k=1}^{p-1} (\alpha_i - \beta_k)}{\prod_{k=1, k\neq i}^{p} (\alpha_i - \alpha_k)}.$$
$$\gamma_i = n\frac{\prod_{k=1}^{i-1} (\alpha_i - \beta_k) \prod_{k=i}^{p-1} (\alpha_i - \beta_k)}{\prod_{k=1}^{i-1} (\alpha_i - \alpha_k) \prod_{k=i+1}^{p} (\alpha_i - \alpha_k)}.$$

Mais, $\alpha_i - \beta_k > 0$ pour $k \in [\![1, i-1]\!]$, $\alpha_i - \beta_k < 0$ pour $k \in [\![i, p-1]\!]$, $\alpha_i - \alpha_k > 0$ pour $k \in [\![1, i-1]\!]$, $\alpha_i - \alpha_k < 0$ pour $k \in [\![i, p]\!]$. On a donc $\gamma_i > 0$.
Finalement, $P(x)P''(x) - P'(x)^2 < 0$.
Supposons maintenant que $P(x) = 0$. $P(x)P''(x) - P'(x)^2 = -P'(x)^2 \leq 0$.
Dans tous les cas, $P(x)P''(x) - P'(x)^2 \leq 0$.

Planche 21 X

1. Trouver les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ stabilisant le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$.
2. Trouver les fractions rationnelles F de $\mathbb{C}(X)$ stabilisant le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$.

Indication 21 Pour P polynôme non nul, on pourra utiliser $\tilde{P} = X^d \overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)$, où d est le degré de P.

Solution 21

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ stabilisant le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$. P n'est pas nul. On écrit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \in \mathbb{N}$ le degré de P. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $|P(e^{i\theta})| = 1$, donc $P(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})} = 1$, ce qui, avec les notations de l'indication, se traduit par
$$P(e^{i\theta})e^{-id\theta}\tilde{P}(e^{i\theta}) = 1, \quad \text{i.e.} \quad P(e^{i\theta})\tilde{P}(e^{i\theta}) = e^{id\theta}.$$
On en déduit que $P\tilde{P} = X^d$, puisque la différence a une infinité de racines.
En passant au degré, il s'en suit que $\tilde{P}$ a un degré nul, i.e. qu'il est constant, ou encore que $\tilde{P} = \overline{a_d}$ et finalement, $P = a_d X^d$, mais alors $|P(1)| = 1$ donne $|a_d| = 1$. Les seuls polynômes possibles sont donc ceux qui s'écrivent aX^n, avec $a \in \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}$. Réciproquement, ces polynômes sont bien solutions.
2. On procède de même, en écrivant $F = X^d \frac{P}{Q}$ avec $d \in \mathbb{Z}$, P et Q dans $\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, premiers entre eux et vérifiant $P(0) \neq 0$ ainsi que $Q(0) \neq 0$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $|F(e^{i\theta})| = 1$ donc
$$P(e^{i\theta})e^{-in\theta}\tilde{P}(e^{i\theta}) = Q(e^{i\theta})e^{-im\theta}\tilde{Q}(e^{i\theta})$$
avec $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ les degrés de P et Q respectivement.
Comme précédemment, on en déduit que
$$X^m P\tilde{P} = X^n Q\tilde{Q}.$$
Mais $X \wedge P = 1$ et $X \wedge \tilde{P} = 1$, donc X^n divise X^m, i.e. $n \leq m$. Mais de la même manière $m \leq n$, on en déduit que $m = n$. Il reste
$$P\tilde{P} = Q\tilde{Q}.$$
On a alors P divise $Q\tilde{Q}$, mais P est premier avec Q, donc P divise $\tilde{Q}$. Ces deux derniers polynômes ont le même degré ($\tilde{Q}$ a le même degré que Q car $Q(0) \neq 0$). Il s'en suit que $\tilde{Q} = cP$ avec c un complexe non nul. Il vient alors $Q = \overline{c}\tilde{P}$. F s'écrit donc $kX^{d-n}\frac{P}{\tilde{P}}$ avec k complexe. Son évaluation en 1 doit être de module 1, ce qui donne $k \in \mathbb{U}$. Réciproquement, toutes les fractions rationnelles de la forme $kX^p\frac{P}{\tilde{P}}$ avec $k \in \mathbb{U}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ conviennent.

Planche 22 X
Soient $\mathbb{K}$ un corps, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(V)$ un morphisme d'algèbres. Montrer que n divise $\dim(V)$ et qu'il existe une base β de V telle que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{Mat}_\beta(\Phi(A)) = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Indication 22 On pourra s'intéresser aux $\Phi(E_{i,i})$ et aux $\Phi(E_{i,1})$, où $(E_{i,j})$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution 22
Notons pour $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $p_{i,j} = \Phi(E_{i,j})$. Alors pour $(i,j,k,l) \in [\![1, n]\!]^4$, $p_{i,j} \circ p_{k;l} = \delta_{j,k} p_{i,l}$. On a donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_{i,i}^2 = p_{i,i}$ et pour $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, avec $i \neq j$, $p_{i,i} \circ p_{j,j} = 0$. Les $p_{i,i}$ sont donc des projecteurs et leurs images (notées V_i) sont en somme directe.
Comme $\Phi(I_n) = \mathrm{Id}_V$, $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrons que $\tilde{p}_{i,1} : V_1 \to V_i$, $x \mapsto p_{i,1}(x)$ est un isomorphisme.
Soit $x \in V_1$. Alors $p_{i,i}(p_{i,1}(x)) = p_{i,1}(x)$, donc $p_{i,1}(x) \in V_i$: $\tilde{p}_{i,1}$ est bien défini.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(\tilde{p}_{i,1})$. $x \in V_1$, donc $x = p_{1,1}(x)$ et $x = p_{1,i} \circ p_{i,1}(x) = 0$. $\tilde{p}_{i,1}$ est injectif.
Soit $y \in V_i$. $y = p_{i,i}(y) = p_{i,1} \circ p_{1,i}(y)$. Posons $x = p_{1,i}(y)$. $p_{1,1}(x) = x$, donc $x \in V_1$ et par construction $y = \tilde{p}_{i,1}(x)$. On a montré que $\tilde{p}_{i,1}$ est surjectif.
V_i a donc la même dimension que V_1 : tous les V_i ont la même dimension. On note d cette dimension commune. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$ donne $\dim(V) = dn$: n divise la dimension de V.
On choisie une base $(e_{1,1}, \ldots, e_{1,d})$ de V_1. On construit une base de chaque V_i par transport de cette base par l'isomorphisme précédent. On la note $(e_{i,1}, \ldots, e_{i,d})$. On note β la base de V concaténée, mais en modifiant l'ordre :

$$\beta = (e_{1,1}, \ldots, e_{n,1}, \ldots, e_{1,d}, \ldots, e_{n,d}).$$

Elle répond bien à la question posée : pour $A = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} E_{i,j}$, pour $r \in [\![1, n]\!]$ et $s \in [\![1, k]\!]$,

$$\begin{aligned} \Phi(A)(e_{r,s}) &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} p_{i,j}(e_{r,s}) \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} p_{i,j}(p_{r,1}(e_{1,s})) \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} (p_{i,j} \circ p_{r,1})(e_{1,s}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,r} p_{i,1}(e_{1,s}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,r} e_{i,s}. \end{aligned}$$

Planche 23 X
Caractériser tous les $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tels que pour tout $M \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $u({}^tM) = {}^t(u(M))$.

Indication 23

Solution 23
Notons $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tM$. On cherche le commutant de T. Or T est diagonalisable, son spectre étant $\{-1, 1\}$ avec $E_{-1}(T) = A_n(\mathbb{R})$ et $E_1(T) = S_n(\mathbb{R})$.
Si u commute avec T, $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont stables par u. On peut donc écrire, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $u(M) = v\left(\frac{1}{2}(M + {}^tM)\right) + w\left(\frac{1}{2}(M - {}^tM)\right)$, où v (resp w) est un endomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ (resp $A_n(\mathbb{R})$).
Réciproquement, tout endomorphisme de cette forme convient.

Planche 24 X
Soit u un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E. On suppose que $(u - 2\mathrm{Id}_E)^2 = 0$. Calculer $\exp(u)$.

Indication 24

Solution 24
On pose $n = u - 2\mathrm{Id}_E$. Alors $n^2 = 0$ et $u = 2\mathrm{Id}_E + n$. Comme $2\mathrm{Id}_E$ et n commutent, on peut appliquer la formule du binôme pour calculer, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$u^p = \sum_{k=0}^{1} \binom{p}{k} 2^{p-k} n^k = 2^p \mathrm{Id}_E + p 2^{p-1} n.$$

Cette formule est encore vraie pour $p = 0$. On en déduit alors que

$$\exp(u) = e^2 \mathrm{Id}_E + e^2 n = -e^2 \mathrm{Id}_E + e^2 u.$$

Planche 25 X
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose ${}^tYX \neq 0$, $AX = \lambda X$, ${}^tAY = \lambda Y$ et $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = n - 1$. Quelle est la multiplicité de λ dans χ_A ?

Indication 25 Faire un changement de base adapté.

Solution 25
Quitte à remplacer A par $A - \lambda I_n$, on peut supposer que $\lambda = 0$. Le rang de A vaut $n - 1$ et $AX = 0$ donc $E_0(A) = \mathrm{Vect}(X)$ ($X \neq 0$, sinon, ${}^tYX = 0$). On complète X en une base orthogonale (pour le produit scalaire canonique) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Avec ce changement de base, on obtient A semblable à

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & L & \\ \vdots & B & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. On décompose Y dans cette base : on note y la coordonnée sur X et on met dans la colonne $\tilde{Y}$ les autres coordonnées. ${}^tYX = y\,{}^tXX$ et donc y est non nul. Dans cette nouvelle base, ${}^tAY = 0$ se traduit par $y\,{}^tL + {}^tB\tilde{Y} = 0$. Quitte à remplacer Y par $\frac{-1}{y}Y$, on peut supposer que $y = -1$ et donc ${}^tB\tilde{Y} = {}^tL$. Si on suppose que ${}^tB$ n'est pas de rang $n - 1$, alors une de ses lignes est combinaison linéaire des autres. On aura alors la même combinaison linéaire pour les lignes de ${}^tL$ et (en repassant aux colonnes des matrices non transposées) $\tilde{A}$ sera de rang inférieur ou égal à $n - 2$, ce qui n'est pas : ${}^tB$ est de rang $n - 1$, i.e. elle est inversible, donc B aussi. Son polynôme caractéristique n'a pas zéro comme racine : avec un calcul par blocs, $\chi_A = X\chi_B$ et donc la multiplicité de 0 dans χ_A est 1.

Planche 26 X

1. Soit $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$|\mathrm{det(M)}| \leq \sqrt{\prod_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}}\left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\mathrm{M}_{\mathrm{i,j}}^2\right)}.$$

2. Si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $x_1, \ldots, x_p$ sont des vecteurs d'un espace euclidien $(E(.|.))$, on pose $G(x_1, \ldots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1\leq i,j\leq p}$. Montrer

$$|\det(G(x_1, \ldots, x_p))| \leq \prod_{i=1}^{p} \|x_i\|^2.$$

3. Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$ avec $p < q$, $x_1, \ldots x_q$ des vecteurs d'un espace euclidien $(E(.|.))$. Comparer $|\det(G(x_1, \ldots, x_q))|$ et $|\det(G(x_1, \ldots, x_p))| \times |\det(G(x_{p+1}, \ldots, x_q))|$.

Indication 26 Pour 1. montrer qu'il existe une matrice $H = (H_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $\det(M)^2 = \det(H)$ et que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $H_{i,i} = \sum\limits_{j=1}^{n} M_{i,j}^2$. On pourra s'inspirer de la planche 18., question 2.

Solution 26

1. Posons $H = MM^T$. On a bien, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $H_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} M_{i,k}^2$ (et $H \in S_n^+(\mathbb{R})$).
Si M n'est pas inversible, l'inégalité voulue est immédiate.
Sinon, les lignes de M sont libres, on peut les orthogonaliser par le procédé de Gram-Schmidt. Il existe donc $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure telle que $M = T\Omega$. Alors, $H = TT^T$. Mais, $\det(H) = \det(T)^2 = \prod\limits_{i=1}^{n} T_{i,i}^2$ puisque T est triangulaire. Mais, en même temps, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $H_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} T_{i,k}^2 \geq T_{i,i}^2$. On obtient bien, $\det(H) \leq \prod\limits_{i=1}^{n} H_{i,i}$. Comme $\det(H) = \det(M)^2$, on peut alors conclure.

2. On procède par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $p = 1$, c'est évident.
On décompose $x_{p+1} = y_{p+1} + z_{p+1}$, avec $y_{p+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p) = F$ et $z_{p+1} \in F^\perp$. Comme $y_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k$, on effectue l'opération $C_{p+1} \longleftarrow C_{p+1} - \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k C_k$ dans le déterminant et on arrive à un déterminant triangulaire inférieur par blocs :

$$|\det(G(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}))| = |\det(G(x_1, \ldots, x_p))| \, \|z_{p+1}\|^2 \leq |\det(G(x_1, \ldots, x_p))| \, \|x_{p+1}\|^2.$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence pour conclure la transmission.

3. On fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on procède aussi par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour prouver :

$$|\det(G(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+n}))| \leq |\det(G(x_1, \ldots, x_p))| \times |\det(G(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n}))|.$$

On a fait l'initialisation dans la question précédente.
Pour la transmission, on décompose $x_{p+n+1} = y_{p+n+1} + z_{p+n+1}$, avec $y_{p+n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{p+n})$ et $z_{p+n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{p+n})^\perp$. On a alors, comme lors de la question précédente,

$$|\det(G(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+n+1}))| = |\det(G(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+n}))| \|z_{p+n+1}\|^2.$$

Par hypothèse de récurrence

$|\det(G(x_1,\dots,x_p,x_{p+1},\dots,x_{p+n+1}))| \leq |\det(G(x_1,\dots,x_p))| \times |\det(G(x_{p+1},\dots,x_{p+n}))| \|z_{p+n+1}\|^2.$

Mais, si on décompose $y_{p+n+1} = t_{p+n+1} + w_{p+n+1}$, avec $t_{p+n+1} \in \mathrm{Vect}(x_{p+1},\dots,x_{p+n})$ et $w_{p+n+1} \in \mathrm{Vect}(x_{p+1},\dots,x_{p+n})^{\perp} \cap \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)$.
On a alors $w_{p+n+1} + z_{p+n+1} \in \mathrm{Vect}(x_{p+1},\dots x_{p+n})^{\perp}$ et w_{p+n+1} et z_{p+n+1} sont orthogonaux, donc d'une part, $\|z_{p+n+1}\|^2 \leq \|w_{p+n+1} + z_{p+n+1}\|^2$ et d'autre part

$$|\det(G(x_{p+1},\dots,x_{p+n+1}))| = |\det(G(x_{p+1},\dots,x_{p+n}))| \, \|w_{p+n+1} + z_{p+n+1}\|^2.$$

On peut alors conclure quant à la transmission.

Planche 27 X
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Déterminer la matrice canonique du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}x$.

Indication 27

Solution 27
On note p le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}x$. On sait, que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $p(v) = \frac{(v|x)}{\|x\|^2}x$.
Notons $M = (m_{i,j})$ la matrice canonique du projecteur orthogonal p, $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ les coordonnées de x dans cette base. On a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = (e_i|x)$.
Pour $j \in [\![1,n]\!]$,

$$p(e_j) = \frac{(e_j|x)}{\|x\|^2}x = \frac{(e_j|x)}{\|x\|^2}\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n \frac{(e_j|x)(e_i|x)}{\|x\|^2}e_i$$

et donc pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$m_{i,j} = \frac{(e_j|x)(e_i|x)}{\|x\|^2}.$$

Planche 28 X

Soit $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \begin{pmatrix} v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & v_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que H_n possède n valeurs propres distinctes.
2. On note $\lambda_{n,1} < \lambda_{n,2} < \dots < \lambda_{n,n}$ les valeurs propres de H_n. Montrer que l'on a

$$\lambda_{n,1} < \lambda_{n-1,1} < \lambda_{n,2} < \dots < \lambda_{n,n-1} < \lambda_{n-1,n-1} < \lambda_{n,n}.$$

Indication 28 On pourra considérer la fraction rationnelle $F_n = \frac{\chi_{H_n}}{\chi_{H_{n-1}}}$.

Solution 28

1. H_n est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable et possède n valeurs propres comptées avec multiplicité. Il reste à voir que chacune des valeurs propres est simple.
   Soit λ une valeur propre. Soit $X = (x_1 \cdots x_n)^T$ un vecteur propre associé. Le système $H_nX = \lambda X$ s'écrit
   $$\begin{cases} (v_1-\lambda)x_1 + x_2 & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_{i-1} + (v_i-\lambda)x_i + x_{i+1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_{n-1} + (v_n-\lambda)x_n & = & 0 \end{cases}$$
   La première équation permet d'exprimer x_2 en fonction de x_1, la deuxième, x_3 en fonction de x_1. De proche en proche, on peut exprimer chaque x_i en fonction de x_1. Le sous-espace propre est donc de dimension au plus 1. Comme cette dimension vaut au moins 1, finalement, elle vaut 1. Comme H_n est diagonalisable, on sait que la multiplicité d'une valeur propres est égale à la dimension de son sous-espace propre. Chaque valeur propre est bien simple et H_n possède n valeurs propres distinctes.

2. Un développement suivant la dernière ligne dans le polynôme caractéristique de H_{n+1}, puis suivant la dernière colonne du deuxième déterminant obtenu, donne
   $$\chi_{H_{n+1}} = (X - v_{n+1})\chi_{H_n} - \chi_{H_{n-1}}.$$
   On a donc
   $$F_{n+1} = (X - v_{n+1}) - \frac{1}{F_n}.$$
   On peut dériver les fonctions rationnelles correspondantes sur chaque intervalle $]\lambda_{n,i}, \lambda_{n,i+1}[$ pour $i \in [\![0, n]\!]$, avec $\lambda_{n,0} = -\infty[$ et $\lambda_{n,n+1} = +\infty$. On obtient
   $$F'_{n+1} = 1 + \frac{F'_n}{F_n^2}.$$
   Or, $F_2 = (X-v_2) - \frac{1}{X-v_1}$ et donc $F'_2 = 1 + \frac{1}{(X-v_1)^2} > 0$. On peut ainsi montrer par récurrence que $F'_n > 0$. F_n est ainsi strictement croissante sur chaque $]\lambda_{n-1,i}, \lambda_{n-1,i+1}[$ pour i allant de 0 à $n-1$ et donc elle y est injective. On a ainsi injectivité de F_n sur n intervalles. Comme $F_n(\lambda_{n,k}) = 0$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, et comme les $\lambda_{n,k}$ sont deux à deux distincts, ils doivent être chacun dans un intervalle différent. Leur position croissante impose alors que $\lambda_{n,k} \in]\lambda_{n-1,k-1}, \lambda_{n-1,k}[$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, ou encore, $\lambda_{n-1,k} \in]\lambda_{n,k}, \lambda_{n,k+1}[$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Planche 29 X
Montrer que $SL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Indication 29

Solution 29
On rappelle que $SL_n(\mathbb{C})$ est engendré par les transvections ($T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $i \neq j$).
□ On peut démontrer ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. La multiplication à droite (resp à gauche) par la matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ revient à ajouter à la j-ième colonne (resp ligne) λ fois la i-ième colonne (resp ligne). On place ainsi un 1 en haut à gauche et des zéros sur le reste de la première ligne et de la première colonne avec ce type de transformations. On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence avec le bloc de taille $n-1$ en bas à droite. □

Soit $M \in SL_n(\mathbb{C})$. On écrit $M = T_{i_1,j_1}(\lambda_1)\cdots T_{i_p,j_p}(\lambda_p)$, produit de transvections. On peut alors poser

$$\begin{array}{rcccl} \gamma & : & [0,1] & \to & SL_n(\mathbb{C}) \\ & & t & \mapsto & T_{i_1,j_1}((1-t)\lambda_1)\cdots T_{i_p,j_p}((1-t)\lambda_p) \end{array}.$$

γ est bien continue de $[0,1]$ dans $SL_n(\mathbb{C})$. $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = I_n$. On peut relier continûment tout élément de $SL_n(\mathbb{C})$ à I_n, donc $SL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Planche 30 X

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\sin(x)\ln(x) = 1$ possède une unique solution dans $]2n\pi, 2n\pi + \pi/2[$. On la note x_n.
2. Donner un développement asymptotique de x_n avec trois termes.

Indication 30

Solution 30

1. On pose $f_n : x \mapsto \sin(x)\ln(x)$. Elle est dérivable sur $]2n\pi, 2n\pi+\pi/2[$ et pour $x \in]2n\pi, 2n\pi+\pi/2[$, $f'(x) = \cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} > 0$ car $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont strictement positifs et $\ln(2n\pi) > 0$, car $2n\pi > 1$. f_n est donc strictement croissante sur $]2n\pi, 2n\pi + \pi/2[$. Or $f_n(2n\pi) = 0$ et $f_n(2n\pi+\pi/2) = \ln(2n\pi+\pi/2) > 1$ car $2n\pi+\pi/2 > e$ puisque $2n\pi > 6$ par exemple. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un antécédent pour 1 et la stricte monotonie assure l'unicité.

2. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n - 2n\pi \in]0, \pi/2[$. L'équation vérifiée par x_n donne
$$\sin(y_n) = \frac{1}{\ln(2n\pi + y_n)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$
donc (y_n) converge vers 0 et la relation précédente montre que $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$. On a ainsi montré
$$x_n = 2n\pi + \frac{1}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$
On pose maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $z_n = x_n - 2n\pi - \frac{1}{\ln(n)}$. On a
$$\sin\left(z_n + \frac{1}{\ln(n)}\right) = \frac{1}{\ln\left(2n\pi + \frac{1}{\ln(n)} + z_n\right)}.$$
En utilisant le développement limité de sin en 0 à l'ordre 3, en mettant $\ln(n)$ en facteur au dénominateur du second membre et en utilisant le développement limité de $t \mapsto \ln(1+t)$ à l'ordre 1, puis celui de $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ à l'ordre 2, on obtient
$$z_n = -\frac{\ln(2\pi)}{(\ln n)^2} + O\left(\frac{1}{(\ln(n))^3}\right).$$
Finalement,
$$x_n = 2n\pi + \frac{1}{\ln(n)} - \frac{\ln(2\pi)}{(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln(n))^2}\right).$$

Planche 31 X

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs telles que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$, la série de terme général b_n converge et la série de terme général na_n diverge.

1. Montrer qu'il existe une unique suite réelle (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k a_{n-k} + b_n$.

2. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

3. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\ell = 0$.

Indication 31 Pour 3, passer aux séries entières (cf lien entre fonction génératrice et espérance).

Solution 31

1. Si $a_0 = 1$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$ et donc la série de terme général na_n converge : contradiction. Donc $0 \leq a_0 < 1$. On construit alors par récurrence la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{b_0}{1-a_0}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{1-a_0}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k a_{n+1-k} + b_{n+1}\right)$. On voit facilement que cette suite convient et que c'est la seule.

2. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$
$$|u_n| \leq \frac{1}{1-a_0}\sum_{k=0}^{n} b_k.$$
On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|u_n| \leq \frac{1}{1-a_0}\sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

3. On pose $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$, $g : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et $h : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$. Ces trois séries entières ont un rayon de convergence au moins égal à 1.
Montrons dans un premier temps, que $(1-t)f(t) \underset{t\to1^-}{\to} \ell$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On a donc, pour $t \in [0, 1[$
$$|(1-t)f(t) - \ell| \leq (1-t)\sum_{n=0}^{n_0} |u_n - \ell| t^n + \varepsilon.$$
Le premier terme du second membre converge vers 0 lorsque t tend vers 1^-. Il existe donc $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour $t \in [1-\eta, 1[$,
$$|(1-t)f(t) - \ell| \leq 2\varepsilon.$$
On a donc bien montré que $(1-t)f(t) \underset{t\to1^-}{\to} \ell$.
Mais dans un second temps, pour $t \in]-1, 1[$, $f(t)(1-g(t)) = h(t)$ (relation définissant (u_n) et produit de Cauchy).
Or $g(t)$ converge vers $g(1) = 1$ en croissant. Donc, pour $t \in]0, 1[$, $0 < g(t) < 1$ et
$$(1-t)f(t) = \frac{h(t)}{\frac{g(t)-g(1)}{t-1}}.$$

$h(t) \underset{t\to 1^-}{\to} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ par le théorème d'Abel radial.
Montrons que $\Delta(t) = \frac{g(t)-g(1)}{t-1} \underset{t\to 1^-}{\to} +\infty$. On aura alors, par unicité de la limite, $\ell = 0$.
Pour $t \in]0,1[$, $\Delta(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(1+\cdots+t^{n-1})$.
Δ est croissante sur $]0,1[$, donc ou bien Δ converge en 1^- vers une limite finie, ou bien diverge vers $+\infty$. Supposons que Δ converge en 1^- vers une limite finie λ.
Pour $t \in]0,1[$, $\Delta(t) \le \lambda$ et pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(1+\cdots+t^{n-1}) \le \lambda$. Pour N fixé, on fait tendre t vers 1^-, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{N} na_n \le \lambda$. La suite des sommes partielles de la série $\sum na_n$ est majorée. Comme elle est à termes positifs, elle converge : contradiction.

Planche 32 X
Trouver toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).$$

Indication 32 A défaut de dériver, on peut intégrer...

Solution 32 Soit f une solution. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on peut intégrer de 0 à y. On obtient

$$\int_x^{x+y} f(u)du - \int_x^{x-y} f(v)dv = 2yf(x).$$

Avec $y = 1$, on a par exemple

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_x^{x+1} f(u)du + \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x} f(v)dv.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On reprend la relation de départ. On fixe x et on la dérive par rapport à y. On obtient

$$f'(x+y) = f'(x-y).$$

Montrons que f' est contante. Soient a et b deux réels. On utilise ce qui précède avec $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{b-a}{2}$. On obtient bien $f'(b) = f'(a)$.
f' est constante : il existe donc $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta$.
On vérifie facilement que toutes les fonctions affines sont solutions.
Finalement, on a montré que les focntions affines sont les seules solutions au problème.

Planche 33 X
Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\|f'\|_\infty \le \frac{2}{b-a}\|f\|_\infty + \frac{b-a}{2}\|f''\|_\infty.$$

Indication 33

Solution 33 Soit $x \in [a,b]$. Par la formule de Taylor avec reste intégral entre a et x, on a

$$f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \int_x^a (a-t)f''(t)dt.$$

De même, entre x et b :

$$f(b) = f(x) + (b-x)f'(x) + \int_x^b (b-t)f''(t)dt.$$

En faisant la différence, il vient

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x) + \int_x^b (b-t)f''(t)dt - \int_x^a (a-t)f''(t)dt.$$

et donc

$$|f'(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{b-a} + \left(\int_x^b (b-t)dt + \int_a^x (t-a)dt\right)\|f''\|_\infty$$

ce qui donne

$$|f'(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{b-a} + \left(\frac{(b-x)^2}{2} + \frac{(x-a)^2}{2}\right)\|f''\|_\infty.$$

Une étude de la fonction $t \mapsto \frac{(b-t)^2}{2} + \frac{(t-a)^2}{2}$ permet de voir qu'elle est maximale en a ou en b et que le maximum vaut $\frac{(b-a)^2}{2}$, ce qui permet de conclure.

Planche 34 X

Pour $0 < b < a$, on pose $G(a,b) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$.

1. Montrer que $G\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = G(a,b)$.

On définit la suite $((a_n, b_n))$ par $(a_0, b_0) = (a,b)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n+b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right)$.

2. Etudier la suite de terme général (a_n, b_n).
3. Que dire de $G(a,b)$?

Indication 34 Pour la première question, on pourra effectuer le changement de variable $\sin\varphi = \frac{2a\sin\theta}{a+b+(a-b)\sin^2\theta}$.

Solution 34

1. On étudie, dans un premier temps, $g : \theta \mapsto \frac{2a\sin\theta}{a+b+(a-b)\sin^2\theta}$.
   g est dérivable sur $[0,\pi/2]$ et pour $\theta \in [0,\pi/2]$,

   $$g'(\theta) = \frac{a\cos(\theta)\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sin^2\theta\right)}{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sin^2\theta\right)^2}.$$

   On effectue le changement de variable $\varphi = \operatorname{Arcsin}(g(\theta))$ dans $G(a,b)$. On obtient :

   $$G(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{g'(\theta)}{\sqrt{1-g^2(\theta)}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b^2-a^2)\frac{a^2\sin^2\theta}{\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sin^2\theta\right)^2}}}.$$

Or, pour $\theta \in [0, \pi/2]$, on a d'une part

$$1 - g^2(\theta) = \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sin^2\theta\right)^2}\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{a^2+b^2}{2}\sin^2\theta + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\sin^4\theta\right).$$

D'autre part,

$$a^2 + (b^2 - a^2)\frac{a^2\sin^2\theta}{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sin^2\theta\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sin^2\theta\right)^2}a^2\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sin^2\theta\right)^2.$$

Après simplifications avec $g'(\theta)$, il reste

$$G(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{a^2+b^2}{2}\sin^2\theta + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\sin^4\theta}}.$$

Or,

$$G\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\theta + ab\sin^2\theta}}.$$

Il suffit de vérifier que

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{a^2+b^2}{2}\sin^2\theta + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\sin^4\theta = \cos^2\theta\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\theta + ab\sin^2\theta\right).$$

Ce qui est vrai.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n+b_n}{2}$ et donc $b_{n+1} \leq a_{n+1}$. Comme on a aussi, $b_0 \leq a_0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq a_n$. On en déduit alors que (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante. Elles convergent donc toutes les deux ((a_n) est minorée par b_0 et (b_n) est majorée par a_0). Notons l_a et l_b leurs limites respectives. Un passage à la limite dans la relation $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ donne $l_a = l_b$. On note ℓ la limite commune de (a_n) et (b_n) (moyenne arithmético-géométrique de a et de b). $((a_n, b_n))$ converge vers (ℓ, ℓ).

3. On montre par récurrence, à l'aide de la première question, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$G(a_n, b_n) = G(a, b).$$

On peut utiliser le théorème de convergence dominée pour passer à la limite dans $G(a_n, b_n)$ (on domine avec la fonction constante en $\frac{1}{b}$, qui est bien intégrable sur $[0, \pi/2]$). On obtient alors

$$G(a, b) = G(\ell, \ell) = \frac{\pi}{2\ell}.$$

Planche 35 X
Soit (a_n) une suite réelle convergeant vers 0 telle que $\sum |a_{k+1} - a_k|$ converge. Montrer que, pour tout réel x, $\sum a_k \sin(kx)$ converge. Indiquer des intervalles de convergence uniforme.

Indication 35 Penser à la transformation d'Abel.

Solution 35 Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x est un multiple de π, tous les termes sont nuls et donc la convergence de la série est évidente.

Sinon, on note, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kx)$. On a

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{(-2i)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{(-2i)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{n}{2}x\right). \end{aligned}$$

On a donc, $|S_n(x)| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et $(S_n(x))$ est bornée : on peut effectuer une transformation d'Abel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(S_k(x) - S_{k-1}(x)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k S_k(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k S_{k-1}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k S_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k(x) \\ &= a_n S_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k(x) \end{aligned}$$

Or, $(a_k - a_{k+1})S_k(x)$ est le terme d'une série absolument convergente (dominé par $|a_{k+1} - a_k|$), et $(a_n S_n(x))$ converge vers 0, comme produit d'une suite convergeant vers 0 et d'une suite bornée.
On en déduit que la suite des sommes partielles de la série de terme général $a_n \sin(nx)$ converge, donc cette série converge.
L'expression obtenue pour $T_n(x)$ est valable pour $x = \pi$. Plaçons nous sur un segment $[a,b] \subset]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, de manière à minorer $x \mapsto \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ sur ce segment (par M égal au minimum de $\left|\sin\left(\frac{a}{2}\right)\right|$ et de $\left|\sin\left(\frac{b}{2}\right)\right|$).
On a alors, pour tout $x \in [a,b]$, pour $(n,N) \in \mathbb{N}^*$, avec $n+1 \leq N-1$

$$R_n^N(x) = \sum_{k=n+1}^{N} a_k \sin(kx) = \sum_{k=n+1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) S_k(x) + a_N S_N(x) - a_{n+1} S_n(x).$$

On peut alors majorer

$$|R_n^N(x)| \leq \frac{1}{M}\left(\sum_{k=n+1}^{N-1} |a_{k+1} - a_k| + |a_N| + |a_{n+1}|\right).$$

On peut passer à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ pour obtenir

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sin(kx)\right| \leq \frac{1}{M}\left(\widetilde{R_n} + |a_{n+1}|\right)$$

en ayant noté $(\widetilde{R_n})$ la suite des restes de la série convergente $\sum |a_{n+1} - a_n|$.
Le majorant obtenu ne dépend pas de x, on a donc

$$\|R_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{M}\left(\widetilde{R_n} + |a_{n+1}|\right).$$

Le majorant converge vers 0, donc (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[a,b]$ et $\sum(x \mapsto a_k \sin(kx))$ aussi.

Planche 36 X
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit le groupe S_n de la loi uniforme. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'un élément de S_n.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n)$.
2. Déterminer la loi de X_n.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer la limite de $\mathbb{P}(X_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1. Montrer
$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X = k)| \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Indication 36 Pour 2. passer par le nombre de dérangements que l'on peut trouver en résolvant un système linéaire (la matrice s'inverse facilement).

Solution 36

1. Une permutation qui a n points fixes est l'identité ! Il n'y en a donc qu'une seule. Comme le cardinal de S_n est $n!$ et comme on l'a muni de la loi uniforme, $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n!}$.
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Pour construire une permutation qui a k points fixes, il faut choisir les k points fixes parmi les n valeurs possibles puis faire un dérangement pour les autres valeurs.
Notons d_p le nombre de dérangements d'un ensemble à p éléments. On a donc
$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\binom{n}{k} d_{n-k}}{n!}.$$
Il reste donc à trouver la valeur de d_p pour tout $p \in \mathbb{N}$. $d_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quand on regarde toutes les permutations de $[\![1, n]\!]$, elles peuvent avoir de 0 à n points fixes. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$
On peut donc voir $(d_k)_{1 \leq k \leq n}$ comme la solution du système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$, avec
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible. Sa transposée représente, dans la base canonique, $P \mapsto P(X+1)$ endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$, dont la bijection réciproque est $P \mapsto P(X-1)$. De même que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $X^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} (X+1)^k$, on obtient

$$d_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k!.$$

Il vient alors, pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!}.$$

3. Pour k fixé, on a donc $\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{1}{ek!}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X = k)| &= \sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X_n = k) - \frac{1}{ek!}| \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} |\sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!} - \frac{1}{e}| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{ek!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} |\sum_{l=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!}| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{ek!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k+1)!} + R_n
\end{aligned}$$

on a utilisé le théorème spécial à certaines séries alternées pour majorer le reste de la série $\sum \frac{(-1)^l}{l!}$ et on a noté R_n le reste de la série $\sum \frac{1}{el!}$. La première somme se majore par

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \leq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leq \frac{2^n}{n!}.$$

Finalement,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X = k)| \leq \frac{2^n}{n!} + R_n$$

et donc on a bien le résultat voulu.